第８講　整数問題

1　次の問いに答えよ．

(1)　３桁の自然数 $N=100a+10b+c$（a，b，c は整数．$1 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$，$0 \leqq c \leqq 9$）がある．２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは座標が整数である異なる２点で x 軸と交わり，グラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が４となる．このとき N を求めよ．

(2)　５を加えると７で割り切れ，７を加えると 11 で割り切れる３桁の自然数のうち最小のものを求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　整数を係数とする 3 次の等式

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

について，次の(1)，(2)を証明せよ．

(1)　有理数 α が方程式 $f(x)=0$ の 1 つの解ならば，α は整数である．

(2)　ある自然数 $k\ (>1)$ に対して，k 個の整数 $f(1)$，$f(2)$，……，$f(k)$ のどれもが k で割り切れなければ，方程式 $f(x)=0$ は有理数の解をもたない．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $S(a)$ で表す．たとえば，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$S(15)=24$ となる．次の問いに答えよ．

(1) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする．このとき $S(a)\geqq(p+1)q$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ．

(2) $a=2^2r$，$b=2^4s$（r，s は正の奇数）の形をした偶数 a，b を考える．$S(a)=2b$，$S(b)=2a$ を満たす a，b を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　整数問題

1　次の問いに答えよ．

(1)　3桁の自然数 $N=100a+10b+c$（a，b，c は整数．$1\leqq a\leqq 9$，$0\leqq b\leqq 9$，$0\leqq c\leqq 9$）がある．2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは座標が整数である異なる2点で x 軸と交わり，グラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が4となる．このとき N を求めよ．

(2)　5を加えると7で割り切れ，7を加えると11で割り切れる3桁の自然数のうち最小のものを求めよ．

(1)　$y=ax^2+bx+c$ が x 軸と $x=\alpha$，β（α，β は整数，$\alpha<\beta$）で交わるとすると

$$-\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx=4 \quad より \quad -a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=4$$

$$-a\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=4 \qquad よって \quad a(\beta-\alpha)^3=24=3\cdot 2^3$$

これを満たす整数の組（$1\leqq a\leqq 9$）は $a=3$，$\beta-\alpha=2$ のみである．

このとき　$y=3(x-\alpha)(x-\alpha-2)=3x^2-6(\alpha+1)x+3\alpha(\alpha+2)$

これを $y=ax^2+bx+c$ と係数比較して　$b=-6(\alpha+1)$，$c=3\alpha(\alpha+2)$

$0\leqq b\leqq 9$ より　$\alpha+1=0$，-1　　つまり　$\alpha=-1$，-2

$c\geqq 0$ より　$\alpha\leqq -2$，$0\leqq\alpha$　　ゆえに　$\alpha=-2$ に限られる．このとき　$b=6$，$c=0$

ゆえに　$N=$**360**

(2)　求める自然数を x とおくと

$x+5=7m$，$x+7=11n$　（m，n は整数）　とおける．

よって　$7m-5=11n-7$　　これを満たす m, n の1つとして $n=4$，$m=6$ があげられる．

したがって　$7(m-6)=11(n-4)$

7と11は互いに素より　$m-6=11k$　（k：整数）　とおける．よって　$m=11k+6$

このとき　$x=7(11k+6)-5=77k+37$

これを満たす3桁の自然数 x のうち，最小のものは　$77\cdot 1+37=$**114**

2　整数を係数とする3次の等式

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

について，次の(1)，(2)を証明せよ．

(1)　有理数 α が方程式 $f(x)=0$ の1つの解ならば，α は整数である．

(2)　ある自然数 k（>1）に対して，k 個の整数 $f(1)$，$f(2)$，……，$f(k)$ のどれもが k で割り切れなければ，方程式 $f(x)=0$ は有理数の解をもたない．

(1)　$\alpha=\dfrac{n}{m}$（m，n は互いに素の整数）とおく．　$f(\alpha)=0$ より　$\dfrac{n^3}{m^3}+\dfrac{an^2}{m^2}+\dfrac{bn}{m}+c=0$

よって　$n^3=-an^2m-bnm^2-cm^3=-(an^2+bnm+cm^2)m$

m，n は互いに素より，$m=1$ に限られる．よって，α は整数である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$f(x)=0$ が有理数解 α をもつとすると $\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=0$ であり，また(1)より α は整数である．よって　$\alpha=km+r$　(m，r は整数．$1\leqq r\leqq k$)　とおける．

$$f(\alpha)=(km+r)^3+a(km+r)^2+b(km+r)+c$$
$$=(k^2m^3+3km^2r+3mr^2+akm^2+2amr+bm)k+r^3+ar^2+br+c$$

(　　) 内を M とおく．

$\alpha=r$ のとき　$r^3+ar^2+br+c=\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=0$

よって　$f(r)=Mk$　より　$1\leqq r\leqq k$ である r について $f(r)$ は k で割り切れる．

ゆえに，対偶が真より，もとの命題も真である．

3　正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $S(a)$ で表す．たとえば，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$S(15)=24$ となる．次の問いに答えよ．

(1)　a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする．このとき $S(a)\geqq(p+1)q$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ．

(2)　$a=2^2r$，$b=2^4s$（r，s は正の奇数）の形をした偶数 a，b を考える．$S(a)=2b$，$S(b)=2a$ を満たす a，b を求めよ．

(1)　$a=pq$ ($p\geqq 2$，$q\geqq 1$) のとき，$pq\geqq 2q>q$ より，pq と q は異なる整数である．

よって，a の正の約数には少なくとも pq と q が含まれる．

ゆえに　$S(a)\geqq pq+q=(p+1)q$

等号成立は a の約数が pq と q に限られるとき．

約数には必ず 1 が含まれるため，$q=1$ である．

また p は p と 1 以外に約数をもたない数，すなわち素数である．

(2)　2 と r は互いに素より　$a=2^2r$，$b=2^4s$ のとき

$S(a)=2b$ より　$(1+2+2^2)S(r)=2^5s$　　つまり　$7S(r)=2^5s$

7 と 2 は互いに素より　$s=7s'$　(s' は自然数)　とおける．

このとき　$S(r)=2^5s'=32s'$　……①

$S(b)=2a$ より　$(1+2+2^2+2^3+2^4)S(s)=2^3r$　　つまり　$31S(s)=2^3r$

31 と 2 は互いに素より　$r=31r'$　(r' は自然数)　とおける．

このとき　$S(s)=2^3r'=8r'$　……②

また，$r=31r'$ のとき　(1)より　$S(r)\geqq(31+1)r'=32r'$　……③

(等号成立は $r'=1$ のとき)

①，③より　$32s'\geqq 32r'$　よって　$s'\geqq r'$

$s=7s'$ のとき　(1)より　$S(s)\geqq(7+1)s'=8s'$　……④　(等号成立は $s'=1$ のとき)

②，④より　$8r'\geqq 8s'$　よって　$r'\geqq s'$

以上より　$r'=s'=1$ のときである．

このとき　$s=7$，$r=31$ より　$a=2^2\cdot 31=$**124**　　$b=2^4\cdot 7=$**112**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　［1］　a を１以上の整数とするとき，次の各命題の真偽の判定とその根拠となる証明をせよ．

(1)　ある a に対して，$\sqrt{a}$ と $\sqrt{a+1}$ はともに有理数である．

(2)　a が自然数ならば $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ は無理数である．

［2］　$7l=4m+3$，$lm=139-28n^2+l+m$ を満たす整数の組 $(l,\ m,\ n)$ は何組あるか求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 直角三角形 ABC は，∠C が直角で，各辺の長さは整数であるとする．辺 BC の長さが 3 以上の素数 p であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 辺 AB，CA の長さを p を用いて表せ．

(2) tan∠A と tan∠B は，いずれも整数にならないことを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　［1］　aを１以上の整数とするとき，次の各命題の真偽の判定とその根拠となる証明をせよ．

(1)　あるaに対して，$\sqrt{a}$と$\sqrt{a+1}$はともに有理数である．

(2)　aが自然数ならば$\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$は無理数である．

［2］　$7l=4m+3$，$lm=139-28n^2+l+m$を満たす整数の組$(l,\ m,\ n)$は何組あるか求めよ．

［1］(1)　$\sqrt{a}$が有理数であると仮定すると　$\sqrt{a}=\frac{n}{m}$　(n，mは互いに素の自然数)　とおける．

有理数を扱うときの典型的な置き方である．

このとき　$a=\frac{n^2}{m^2}$

aは１以上の整数であり，n，mは互いに素の自然数であることから，$m=1$に限られる．よって　$\sqrt{a}$は自然数である．

ここで，$\sqrt{a}$と$\sqrt{a+1}$はともに有理数，すなわち整数と仮定すると

$$0<\sqrt{a+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}<1$$

したがって，２整数の差の絶対値が１未満であることより，ともに整数であることに反する．

ゆえに，偽．

(2)　$\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$が有理数であると仮定すると，

$$\sqrt{a+1}-\sqrt{a}=\frac{n}{m}\quad\cdots\cdots\ ①$$　(n，mは互いに素の自然数)　とおける．

このとき　$$\frac{m}{n}=\frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}=\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\quad\cdots\cdots②$$

(②＋①)÷2より　$\sqrt{a+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)$　　(②－①)÷2より　$\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-\frac{n}{m}\right)$

よって，$\sqrt{a+1}$，$\sqrt{a}$はともに有理数となり，(1)に反する．

したがって，$\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$は無理数である．ゆえに真．

［2］　$7l=4m+3$　より　$7(l-1)=4(m-1)$

不定方程式．特殊解を自分で発見しよう．

７と４は互いに素より　$l-1=4k$　(kは整数)　とおける．

よって　$l=4k+1$，$m=7k+1$

これらを　$lm=139-28n^2+l+m$　に代入して

$(4k+1)(7k+1)=139-28n^2+4k+1+7k+1$　　$k^2+n^2=5$

これを満たす整数の組は　$(k,\ n)=(\pm1,\ \pm2)$，$(\pm2,\ \pm1)$　(複号任意)

よって，整数の組$(l,\ m,\ n)$は**８組**ある．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 直角三角形ABCは，∠Cが直角で，各辺の長さは整数であるとする．辺BCの長さが3以上の素数pであるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 辺AB，CAの長さをpを用いて表せ．

(2) $\tan\angle A$と$\tan\angle B$は，いずれも整数にならないことを示せ．

(1) $AB=c$，$CA=b$　(b，cは自然数)　とおく．

三平方の定理により　$p^2=c^2-b^2$

よって　$(c+b)(c-b)=p^2$　← 積の形

$c+b>c-b$であり，pは素数であることより　$c+b=p^2$，$c-b=1$　のみ

よって　$b=\dfrac{p^2-1}{2}$，$c=\dfrac{p^2+1}{2}$

ゆえに　$\mathbf{AB=\dfrac{p^2+1}{2}}$，$\mathbf{CA=\dfrac{p^2-1}{2}}$

(2) $\tan\angle A=\dfrac{p}{b}=\dfrac{2p}{p^2-1}=\dfrac{2p}{(p+1)(p-1)}$

pは3以上の素数すなわち奇数より，$p+1$，$p-1$はともに偶数

よって，分母・分子を2で1回のみ約分可能であり，必ず分母には偶数が残る．

$$\tan\angle B=\frac{b}{p}=\frac{(p+1)(p-1)}{2p}$$

同様に，分母・分子を2で1回のみ約分可能であり，必ず分母には奇数pが残る．

ゆえに，$\tan\angle A$と$\tan\angle B$は，いずれも整数にならない．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。